Beziehungsmatrix

Jürgen Lerner

Zusammenfassung

Ausser durch Graphen lassen sich Netzwerke auch durch Matrizen repräsentieren. Zunächst einmal ist diese Art der Darstellung nicht ausdrucksstärker als die durch Graphen (siehe vorheriges Kapitel). Da es für Matrizen – als abstrakte mathematische Objekte – aber eine Vielzahl von Theoremen, algebraischen Operationen und algorithmischen Verfahren gibt, gewinnt man so auch neue Einsichten und Methoden für die Netzwerkanalyse.

1 Repräsentation von Netzwerken durch Matrizen

In diesem Kapitel behandeln wir die Darstellung von Netzwerken durch Matrizen und gehen darauf ein, wie sich gewisse algebraische Operationen auf Matrizen anwenden lassen, um Beziehungen miteinander zu kombinieren und so neue Beziehungen zu erhalten. Definitionen und Aussagen rund um Matrizen finden sich zum Beispiel in Artin (1991). Der Zusammenhang zwischen Graphen (Netzwerken) und Matrizen wird in Godsil and Royle (2001) behandelt. Beide Referenzen gehen aber weit über die Themen dieses Kapitels hinaus.

Unter einer *Matrix* versteht man zunächst einmal nichts weiter als eine rechteckige Anordnung von Zahlen, wie beispielsweise in Abb. 1 (*links*) gezeigt.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \\ C & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

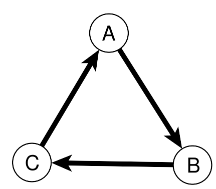

Abbildung 1: Adjazenzmatrix X (*links*) eines Netzwerkes mit drei Akteuren (*rechts*). Die Tabelle in der Mitte zeigt die Matrix X zusammen mit der Indizierung der Zeilen und Spalten durch die Akteure A, B, C.

Die *Dimension* einer Matrix ist gegeben durch ihre Zeilenzahl (Höhe) und Spaltenzahl (Breite). Der Ausdruck $m \times n$-Matrix bezeichnet Matrizen mit genau m Zeilen und n Spalten. Der Ausdruck $X_{i,j}$ bezeichnet den Eintrag (d. h. die Zahl) in Zeile i und Spalte j der Matrix X; für die Matrix X aus Abb. 1 gelten zum Beispiel $X_{1,2} = 1$ und $X_{2,1} = 0$.

1.1 Adjazenzmatrix

Matrizen eignen sich dafür, die paarweisen Beziehungen innerhalb einer Menge von Akteuren zu codieren. Dazu werden zuerst die Akteure in eine beliebige aber fest gewählte Reihenfolge gebracht, wodurch man eine Zuordnung der Akteure zu den Zeilen und Spalten einer Matrix X erhält (vgl. Abb. 1, *Mitte*). Der Eintrag in Zeile i und Spalte j von X codiert dann ob Akteur i und Akteur j in der jeweiligen Netzwerkbeziehung stehen oder nicht: ist $X_{i,j} = 1$, so ist die Beziehung von i nach j gegeben; ist $X_{i,j} = 0$, so gibt es keine Beziehung von i nach j. Kurz gesagt ist die *Adjazenzmatrix* eines gerichteten Netzwerks $G = (V, E)$ mit n

Akteuren $\{v_1, \ldots, v_n\} = V$ die $n \times n$-Matrix X definiert durch

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{falls } (v_i, v_j) \notin E \end{cases} .$$

Zum Beispiel codiert die Matrix X aus Abb. 1 (*links*) das Netzwerk aus Abb. 1 (*rechts*), falls A der erste, B der zweite und C der dritte Akteur ist.

Wir betonen, dass eine Matrix nur dann auf eindeutige Weise ein Netzwerk definiert, wenn die Reihenfolge der Akteure festgelegt wurde. Werden aus einem Netzwerk unter Verwendung von verschiedenen Akteurs-Reihenfolgen verschiedene Adjazenzmatrizen erzeugt, so sieht man diesen unter Umständen nicht einmal an, dass sie dasselbe Netzwerk definieren.

Ungerichtete Beziehungen Die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Netzwerks ist, unter Verwendung der obigen Notation, definiert durch

$$X_{i,j} = X_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases} .$$

Allgemein heißen Matrizen X, die für alle Indizes i und j die Gleichung $X_{i,j} = X_{j,i}$ erfüllen, *symmetrisch*. Die Matrix X in Abb. 1 ist zum Beispiel nicht symmetrisch da $X_{1,2} \neq X_{2,1}$.

Gewichtete Beziehungen Die Beziehung zwischen zwei Akteuren kann ein *Gewicht* oder eine *Vielfachheit* haben. Beispiele sind etwa die Anzahl der gemeinsam veröffentlichten Artikel in Koautoren-Netzwerken oder eine Zahl die die subjektive Intensität einer Freundschaftsbeziehung codiert. Gewichtete Beziehungen lassen sich in Adjazenzmatrizen speichern, indem man in den Eintrag an Stelle (i, j) das Gewicht der Beziehung von Akteur i zu Akteur j schreibt (der Eintrag ist weiterhin gleich Null, falls i mit j nicht in der jeweiligen Beziehung stehen).

1.2 Bimodale Adjazenzmatrix

Bimodale Beziehungen sind Beziehungen zwischen verschiedenen Typen von Akteuren und/oder Objekten. Ein Beispiel hierfür sind wissenschaftliche Autoren (Akteure), die mit den von ihnen geschriebenen Artikeln (Objekten) in Beziehung stehen, vergleiche Abb. 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{c|ccccc} & U & V & W & X & Y \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

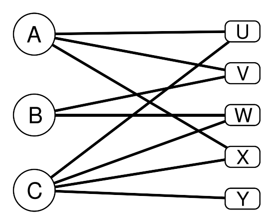

Abbildung 2: Bimodales Netzwerk von Autoren und Artikeln (*rechts*) und dessen Adjazenzmatrix (*links*). Die Tabelle in der Mitte zeigt die Indizierung der Zeilen durch die Autoren A, B, C und die Indizierung der Spalten durch die Artikel U, V, W, X, Y.

Solche bimodalen Beziehungen kann man durch Matrizen codieren, indem man zum Beispiel die Zeilen durch die Autoren und die Spalten durch die Artikel indiziert. Eine Eins in Zeile i und Spalte j bedeutet dann, dass Artikel j von Autor i geschrieben wurde. Auch eine bimodale Adjazenzmatrix ist erst dann eindeutig durch das Netzwerk gegeben, wenn die Reihenfolgen, sowohl der Akteure als auch der Objekte, festgehalten sind.

1.3 Inzidenzmatrix und Hypergraphen

Ein ungerichtetes Netzwerk kann auch auf andere Weise durch eine Matrix repräsentiert werden. Ist $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit n Knoten $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und m Kanten $\{e_1, \ldots, e_m\}$, so ist die *Inzidenzmatrix* von G die $n \times m$ Matrix X deren Eintrag in Zeile i und Spalte j gleich Eins ist, falls der Knoten v_i mit der Kante e_j inzident ist; $X_{i,j}$ ist gleich Null, falls v_i nicht mit e_j inzident ist.

Die Definition der Inzidenzmatrix lässt sich leicht auf sogenannte *Hypergraphen* verallgemeinern (siehe vorheriges Kapitel "Graphentheorie"). Hypergraphen sind nicht auf dyadische Beziehungen beschränkt, sondern können Beziehungen zwischen einer beliebigen Anzahl von Akteuren codieren. Zum Beispiel definiert in bimodalen Autor/Artikel-Netzwerken (siehe Abb. 2) ein Artikel eine Hyperkante, die eine Beziehung zwischen einer variablen Anzahl von Autoren darstellt. Sieht man die Artikel als Kanten eines Hypergraphen an, dann ist die in Abb. 2 (*links*) gezeigte Matrix die Inzidenzmatrix des Hypergraphen, die angibt welcher Akteur mit welcher Kante inzident ist.

2 Netzwerkdichte

Die *Dichte* $\rho(G)$ eines Netzwerks G ist generell definiert als das Verhältnis

$$\rho(G) = \frac{\text{Anzahl vorhandener Kanten in } G}{\text{Anzahl möglicher Kanten in } G} \quad .$$

Die Anzahl möglicher Kanten ist abhängig davon, ob die Beziehung gerichtet oder ungerichtet ist und ob *Schleifen* (d. h. Kanten die einen Akteur mit sich selbst verbinden) erlaubt sind. Für ein Netzwerk mit n Akteuren sind die maximal möglichen Kantenzahlen in den verschiedenen Fällen gegeben durch Tabelle 1.

Tabelle 1: Maximale Anzahl von Kanten in einem Netzwerk mit n Akteuren.

	gerichtet	ungerichtet
schleifenfrei	$n(n-1)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
mit Schleifen	n^2	$\frac{n(n+1)}{2}$

Die Anzahl der vorhandenen Kanten kann man unter anderem aus der Adjazenzmatrix X berechnen, indem man über die Matrixeinträge summiert. Die Zahl der Kanten in einem gerichteten Netzwerk ist gegeben durch $\sum_{i,j} X_{i,j}$ (hier wird über alle geordneten Paare (i, j) summiert). Die Zahl der Kanten in einem ungerichteten Netzwerk ist gegeben durch $\sum_{i \leq j} X_{i,j}$ (hier wird nur eines der beiden Paare (i, j) und (j, i) als Summationsindex verwendet).

Die Dichte von sozialen Netzwerken strebt gewöhnlicherweise gegen Null, wenn die Anzahl ihrer Akteure zunimmt. Daraus folgt, dass zwei Netzwerke nur dann bezüglich ihrer Dichte verglichen werden sollten, wenn sie die gleiche Anzahl von Akteuren haben. Eine Kennzahl für Netzwerke, die robuster gegenüber Unterschieden in der Anzahl der Akteure ist, ist der *durchschnittliche Grad* (vgl. vorheriges Kapitel "Graphentheorie").

3 Matrixoperationen

Ausser für die reine Darstellung von Netzwerken lassen sich Matrizen auch noch einsetzen, um Beziehungen zu transformieren oder zu kombinieren. Wir werden hier die algebraischen Operationen für Matrizen, die in der Netzwerkanalyse häufig gebraucht werden, vorstellen.

3.1 Transposition

Eine der einfachsten Operationen auf Matrizen ist die Transposition, die ausgeführt wird, indem Zeilenindizes und Spaltenindizes miteinander vertauscht werden. Die *transponierte* Matrix einer $m \times n$-Matrix X ist die $n \times m$-Matrix X^{T}, deren Einträge durch $X^{\mathrm{T}}_{i,j} = X_{j,i}$ gegeben sind. Vergleiche das folgende Beispiel.

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad X^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Transposition von Adjazenzmatrizen entspricht der Umkehrung der Beziehungsrichtung. Codiert zum Beispiel eine Matrix, welcher Akteur wem eine E-Mail geschickt hat, dann codiert die transponierte Matrix, wer von wem eine E-Mail erhalten hat. In Abbildungen von Netzwerken (z. B. Abb. 1, *rechts*) spiegelt sich das Transponieren durch die Umkehrung der Pfeile wider.

3.2 Addition

Matrizen der gleichen Dimension (und nur solche) können miteinander addiert werden. Die Summe $Z = X+Y$ von zwei $m\times n$-Matrizen X und Y ist ebenfalls eine $m\times n$-Matrix, definiert durch $Z_{i,j} = X_{i,j}+Y_{i,j}$. Vergleiche das folgende Beispiel.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+1 & -2+4 \\ 2-1 & 0+2 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Die Addition von Adjazenzmatrizen entspricht einer *oder-Verknüpfung* der Beziehungen. Codiert zum Beispiel, im Kontext eines Koautoren-Netzwerks, eine Matrix X die Anzahl der gemeinsam veröffentlichen Zeitschriftenartikel und Y die Anzahl der gemeinsam veröffentlichten Konferenzartikel, so codiert ihre Summe $Z = X + Y$ die Anzahl der gemeinsam in Zeitschriften *oder* auf Konferenzen veröffentlichten Artikel.

3.3 Multiplikation

Die Multiplikation von Matrizen ist etwas komplizierter als die bisherigen Operationen – die Mühe lohnt sich aber, da die Multiplikation von Adjazenzmatrizen dafür verwendet werden kann, um Verkettungen von Beziehungen, wie z. B. "Feind eines Freundes" zu erhalten, wodurch sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten für die Netzwerkanalyse ergeben. Wir geben erst die Definition der Produktmatrix und veranschaulichen dann, dass damit tatsächlich die Verkettung von Beziehungen formalisiert wird.

Zwei Matrizen X und Y können dann (und nur dann) multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl von X gleich der Zeilenzahl von Y ist. Der Eintrag in Zeile i und Spalte j der Produktmatrix $X \cdot Y$ entsteht dadurch, dass nacheinander die Einträge der i-ten Zeile von X mit denen der j-ten Spalte von Y multipliziert und diese Teilprodukte addiert werden. Präzise gesagt falls X eine $k \times m$-Matrix und Y eine $m \times n$-Matrix ist, dann ist das Produkt $Z = X \cdot Y$ eine $k \times n$-Matrix, deren Eintrag in Zeile i und Spalte j definiert ist durch

$$Z_{i,j} = \sum_{h=1}^{m} X_{i,h} \cdot Y_{h,j} \quad . \tag{2}$$

Diese auf den ersten Blick willkürlich erscheinende Definition kann nachvollziehbar gemacht werden, indem man sich an die ursprüngliche Absicht, nämlich die Verkettung von Beziehungen zu definieren, vor Augen führt. Nehmen wir zum Beispiel an, dass die Matrix X Freundschaften und die Matrix Y Feindseligkeiten auf der selben Akteursmenge definiert, d. h. $X_{i,h} = 1$ bedeutet, dass Akteur i mit Akteur h befreundet ist, während $Y_{h,j} = 1$ bedeutet, dass h und j in Feindschaft stehen. Ein Summand $X_{i,h} \cdot Y_{h,j}$ in Gleichung (2) ist damit gleich Eins, falls i mit h befreundet und h mit j befeindet ist; ist dies nicht der Fall, d. h. ist i mit h nicht befreundet oder h mit j nicht befeindet, so ist der Summand $X_{i,h} \cdot Y_{h,j}$ gleich Null. Lassen wir also den Index h in Gleichung (2) über alle Akteure laufen, so erhalten wir die Anzahl von Akteuren, die zugleich

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

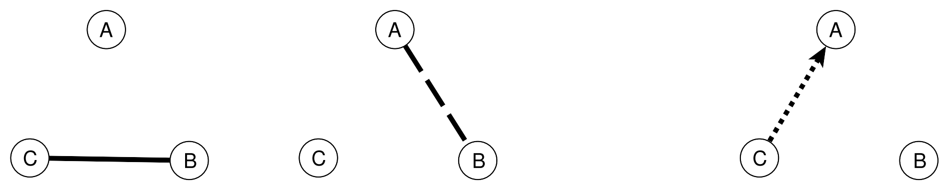

Abbildung 3: (*Links*) Matrix X codiert gegenseitige Freundschaft zwischen Akteuren; (*Mitte*) Matrix Y codiert gegenseitige Feindschaft zwischen Akteuren; (*rechts*) das Matrixprodukt $X \cdot Y$ codiert welcher Akteur Feind eines Freundes eines anderen Akteurs ist. Hier ist Akteur A ein Feind eines Freundes von C. Die entsprechende Eins in der Produktmatrix $X \cdot Y$ ensteht durch Multiplikation der dritten Zeile von X mit der ersten Spalte von Y (jeweils fett gedruckt).

Freund von i und Feind von j sind. Die Matrixmultiplikation und ihr Zusammenhang mit der Verkettung von Beziehungen ist in Abb. 3 veranschaulicht.

Das Beispiel aus Abb. 3 demonstriert auch, dass die Verkettung von zwei symmetrischen Beziehungen nicht immer symmetrisch ist. Tatsächlich ist in diesem Beispiel Akteur C *nicht* der Feind eines Freundes von Akteur A.

Multipliziert man eine Matrix X mit sich selbst, so erhält man die Matrix $X^2 = X \cdot X$ die für jedes Paar von Akteuren i, j angibt, wieviele Wege der Länge Zwei es von i zu j gibt. Allgemeiner gibt der Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix

$$X^k = \underbrace{X \cdot \ldots \cdot X}_{k\text{-mal}}$$

an wieviele Wege der Länge k es von i zu j gibt (vgl. *Katz Status* im Kapitel "Zentralitäten").

Die Multiplikation läßt sich auch auf bimodale Matrizen anwenden. Dadurch können aus bimodalen Netzwerken interessante unimodale Netzwerke gebildet werden. Nehmen wir an, wir haben eine bimodale Adjazenzmatrix X, die die Verbindungen zwischen Autoren (entsprechend den Zeilenindizes) und denen von ihnen veröffentlichten Artikeln (entsprechend den Spaltenindizes) codiert. Die Matrix $Z = X \cdot X^{\mathrm{T}}$ definiert dann ein Koautoren-Netzwerk in dem für je zwei Autoren angegeben ist, wie viele Artikel sie *gemeinsam* veröffentlicht haben. Vergleiche das Beispiel in Abb. 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

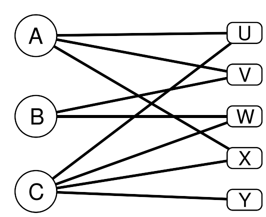

Abbildung 4: Multipliziert man die Autor/Artikel-Matrix (*links*) mit ihrer Transponierten (der Artikel/Autor-Matrix, *Mitte*), so erhält man die Koautor-Matrix (*rechts*), die für je zwei Autoren angibt, wieviele Artikel diese gemeinsam veröffentlicht haben.

3.4 Rechenregeln für Matrixoperationen

Die Addition und Multiplikation von Matrizen erfüllen einige Rechenregeln, die den entsprechenden Regeln für die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen gleichen; wir betonen aber, dass nicht alle Regeln, die man von den reellen Zahlen her kennt, auch für Matrizen gelten. Alle Regeln können durch Nachrechnen verifiziert werden (vgl. Artin (1991)).

Assoziativität Die Addition und die Multiplikation von Matrizen ist *assoziativ*, d. h. werden drei oder mehr Matrizen miteinander addiert/multipliziert dann spielt es keine Rolle, welche davon zuerst miteinander verknüpft werden. Genauer gesagt gilt für drei beliebige Matrizen X, Y und Z,

- falls die Summen $X+Y$ und $Y+Z$ definiert sind, so gilt $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$;
- falls die Produkte $X \cdot Y$ und $Y \cdot Z$ definiert sind, so gilt $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.

Distributivität Falls für drei beliebige Matrizen X, Y und Z, die Produkte $X \cdot Y$ und $X \cdot Z$, sowie die Summe $Y+Z$ definiert sind, so gilt

$$X \cdot (Y+Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z) \ .$$

Falls für drei beliebige Matrizen X, Y und Z, die Produkte $X \cdot Z$ und $Y \cdot Z$, sowie die Summe $X+Y$ definiert sind, so gilt

$$(X+Y) \cdot Z = (X \cdot Z) + (Y \cdot Z) \ .$$

Nach Konvention wird bei fehlenden Klammern die Multiplikation vor der Addition ausgeführt, d. h. wir schreiben zum Beispiel $X \cdot Y + X \cdot Z$ für $(X \cdot Y) + (X \cdot Z)$.

Transposition von Summen und Produkten Falls für zwei beliebige Matrizen X und Y die Summe $X+Y$ definiert ist, so gilt

$$(X+Y)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}} \ .$$

Falls für zwei beliebige Matrizen X und Y das Produkt $X \cdot Y$ definiert ist, so gilt

$$(X \cdot Y)^{\mathrm{T}} = Y^{\mathrm{T}} \cdot X^{\mathrm{T}} \ .$$

Zu beachten ist, dass sich beim Transponieren eines Produktes die Reihenfolge der Faktoren ändert.

Kommutativität der Addition Bei der Addition von Matrizen spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, d. h. für zwei beliebige Matrizen X und Y, deren Summe definiert ist, gilt

$$X+Y = Y+X \ .$$

Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Im Gegensatz zur Addition spielt bei der Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren eine Rolle. Dies bedeutet, dass es Matrizen X und Y gibt, für die gilt

$$X \cdot Y \neq Y \cdot X \ ,$$

selbst dann, wenn beide Produkte definiert sind. Beispielsweise ist, mit den Freundschafts- und Feindschafts-Matrizen aus Abb. 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insbesondere gilt in diesem Netzwerk nicht, dass Freunde von Feinden gleich Feinde von Freunden sind.

Es kann vorkommen, dass Matrix-Gleichungen, die im Allgemeinen nicht gelten für spezielle Matrizen doch gelten, was auf nicht-triviale und interessante Eigenschaften des Netzwerks hinweist. Dieses Thema wird ausführlich in Pattison (1993) behandelt.

4 Eigenvektorzentralität

Die *Eigenvektorzentralität* ist ein Beispiel dafür, wie Definitionen und Theoreme aus der Matrixtheorie sich auf die Netzwerkanalyse übertragen lassen. Eine Zentralität ist dadurch gegeben, dass den Akteuren eines Netzwerkes reelle Werte, die die Wichtigkeit des jeweiligen Akteurs angeben, zugewiesen werden. Speziell bei der Eigenvektorzentralität möchte man diese Werte so wählen, dass Akteure um so wichtiger sind, je wichtiger ihre Nachbarn sind. Präziser formuliert sucht man nach Akteursbewertungen $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, so dass mit einem geeigneten Proportionalitätsfaktor λ für alle Akteure i gilt

$$\lambda \cdot c_i = \sum_{j \in N(i)} c_j \ ,$$

d. h. die Summe der Bewertungen der Nachbarn von i ergibt ein konstantes Vielfaches der Bewertung von i. Diese Gleichung ist für alle Akteure genau dann erfüllt wenn die Adjazenzmatrix X und der Spaltenvektor $C = [c_1, \ldots, c_n]^{\mathrm{T}}$ der Zentralitätswerte die Gleichung

$$A \cdot C = \lambda \cdot C$$

erfüllen. Vergleiche Abb. 5, in der diese Eigenschaft mit $\lambda = 2$ erfüllt ist.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

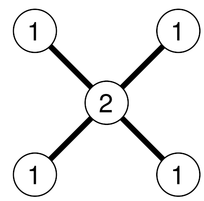

Abbildung 5: Netzwerk aus fünf Akteuren von denen jeder mit seiner Eigenvektorzentralität beschriftet ist. Es gilt, dass für jeden Akteur die Summe der Bewertungen seiner Nachbarn das Doppelte seiner eigenen Bewertung ergibt. Der Spaltenvektor, dessen Einträge die einzelnen Akteursbewertungen darstellen wird durch die Adjazenzmatrix auf das Doppelte seiner selbst abgebildet.

Im allgemeinen heisst ein Vector C ein *Eigenvektor* einer quadratischen Matrix X falls C nicht der Nullvektor ist und es eine Zahl λ gibt, so dass $X \cdot C = \lambda \cdot C$ erfüllt ist. Ein bekanntes Theorem aus der algebraischen Graphentheorie Godsil and Royle (2001) garantiert, dass es für Adjazenzmatrizen von stark zusammenhängenden Graphen immer einen Eigenvektor gibt, dessen Einträge alle positiv sind. Zudem ist der Eigenvektor mit dieser Eigenschaft bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig und definiert somit einen(bis auf Normalisierung eindeutigen) Zentralitätswert für jeden Knoten.

Literatur

Artin, M. (1991), *Algebra*, Prentice Hall.

Godsil, C. and Royle, G. (2001), *Algebraic Graph Theory*, Springer.

Pattison, P. (1993), *Algebraic Models for Social Networks*, Cambridge University Press.